MAT 2217 Diferansiyel Denklemler

Arasınav Soruları

23.11.2013

Adı-Soyadı:
Numarası :
Bölümü :

1. $y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x)$ eğriler ailesini sağlayan en düşük mertebeden dif. denklemi bulunuz.(15p.)

2. $(2x - 3y + 4)\,dx + (3x - 2y + 1)\,dy = 0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.(20p.)

3. $\begin{cases} dx - 2xy^{-1}dy = x^4 dy \\ y(1) = 1 \end{cases}$ Cauchy problemini çözünüz.(15p.)

4. $(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)\,dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)\,dy = 0$ dif. denkleminin genel çözümünü integrasyon çarpanı yardımı ile bulunuz.(20p.)

5. $2xdy + ydx + xy^2(xdy + ydx) = 0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.(15p.)

6. $y' + e^x - 3y + e^{-x}y^2 = 0$ dif. denkleminin bir özel çözümü $y_1(x) = e^x$ olduğuna göre genel çözümünü bulunuz.(15p.)

NOT: Sınav süresi 110dk. olup ilk 30dk. çıkmak yasaktır.

Başarılar.

1.
$$\begin{cases} y = c_1\cos(\ln x) + c_2\sin(\ln x) \\ y' = -\dfrac{c_1\sin(\ln x)}{x} + \dfrac{c_2\cos(\ln x)}{x} \Rightarrow xy' = -c_1\sin(\ln x) + c_2\cos(\ln x) \\ (xy')' = -\dfrac{c_1\cos(\ln x)}{x} - \dfrac{c_2\sin(\ln x)}{x} \Rightarrow x(y' + xy'') = -(\underbrace{c_1\cos(\ln x) + c_2\sin(\ln x)}_{y}) \end{cases}$$

$$x^2y'' + xy' + y = 0$$

veya;

$$\begin{cases} y = c_1\cos(\ln x) + c_2\sin(\ln x) \\ y' = -\dfrac{c_1\sin(\ln x)}{x} + \dfrac{c_2\cos(\ln x)}{x} \Rightarrow xy' = -c_1\sin(\ln x) + c_2\cos(\ln x) \\ y'' = -\dfrac{c_1\cos(\ln x) - c_1\sin(\ln x)}{x^2} + \dfrac{-c_2\sin(\ln x) - c_2\cos(\ln x)}{x^2} \end{cases}$$ 8

üçüncü denklemden;

$$x^2y'' = -\underbrace{[c_1\cos(\ln x) + c_2\sin(\ln x)]}_{y} - \underbrace{[-c_1\sin(\ln x) + c_2\cos(\ln x)]}_{xy'}$$ 5

$$\Rightarrow x^2y'' + xy' + y = 0$$ 2

2) $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x+3y-4}{3x-2y+1}$ hom. hale gelebilir. $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$ old. $\begin{cases} x = u+\alpha \\ y = v+\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = du \\ dy = dv \end{cases}$ 3 dön. yapılırsa;

$\frac{dv}{du} = \frac{-2u+3v\overbrace{-2\alpha+3\beta-4}}{3u-2v\underline{+3\alpha-2\beta+1}}$ $\begin{cases} -2\alpha+3\beta-4=0 \,/3 \\ 3\alpha-2\beta+1=0 \,/2 \end{cases}$ $5\beta=10 \Rightarrow \beta=2,\ \alpha=1$ 3 olur.

o halde $\begin{cases} x=u+1 \\ y=v+2 \end{cases}$ dön. $\frac{dv}{du} = \frac{-2u+3v}{3u-2v}$ 2 hom. dif. $\frac{v}{u}=z \Rightarrow v=uz \Rightarrow v'=z+uz'$ 3 dön. yap.

$z+uz' = \frac{-2+3z}{3-2z} \Rightarrow uz' = \frac{-2+3z}{3-2z} - z \Rightarrow u\frac{dz}{du} = \frac{-2+\cancel{3z}-\cancel{3z}+2z^2}{3-2z} \Rightarrow u\frac{dz}{du} = \frac{-2(z^2-1)}{2z-3}$

$\Rightarrow \int \frac{2z-3}{z^2-1}dz = -2\int\frac{du}{u} \Rightarrow -\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z-1} + \frac{5}{2}\int\frac{dz}{z+1} + 2\int\frac{du}{u} = 0$

$\Rightarrow -\int\frac{dz}{z-1} + 5\int\frac{dz}{z+1} + 4\int\frac{du}{u} = 0$ 5 $\Rightarrow \ln\frac{(z+1)^5u^4}{z-1} = \ln c$

$\Rightarrow (z+1)^5u^4 = c(z-1)$ 2

$z=\frac{v}{u}$ old. $(\frac{v}{u}+1)^5 . u^4 = c(\frac{v}{u}-1) \Rightarrow (v+u)^5 = c(v-u)$

$\begin{cases} u=x-1 \\ v=y-2 \end{cases}$ old. $(x+y-3)^5 = c(y-x-1)$ 2 genel çözüm

3) $\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x = x^4 \Rightarrow x' - \frac{2}{y}x = x^4$ (x'e göre Bernoulli)

$x \neq 0$ için x^{-4} ile çarpılırsa; $x^{-4}x' - \frac{2}{y}x^{-3} = 1$ 1 olur. $x^{-3}=z \Rightarrow -3x^{-4}x' = z'$, $\Rightarrow x^{-4}x' = -\frac{z'}{3}$ } dön. yap. 3

$-\frac{z'}{3} - \frac{2}{y}z = 1 \Rightarrow z' + \frac{6}{y}z = -3$ 2 lineer.

$z = e^{-\int\frac{6}{y}dy}\left[c - 3\int e^{\int\frac{6}{y}dy}dy\right]$ 2 $\Rightarrow z = y^{-6}\left[c - 3\int y^6 dy\right] \Rightarrow z = y^{-6}\left[c - \frac{3}{7}y^7\right]$ 2

$z=x^{-3}$ old. $x^{-3} = y^{-6}\left[c - \frac{3}{7}y^7\right]$ 2 genel çözüm

$y(1)=1$ koşulunu sağlayan çözüm için genel çözümde $x=1, y=1$ alınırsa

$1^{-3} = 1^{-6}\left[c - \frac{3}{7}1^7\right] \Rightarrow 1 = c - \frac{3}{7} \Rightarrow c = 1+\frac{3}{7} \Rightarrow c = \frac{10}{7}$ bulunur.

Dolayısıyla, $x^{-3} = y^{-6}\left[\frac{10}{7} - \frac{3}{7}y^7\right]$ 3 çözümü alınır.

4) $M(x,y) = 2xy^4e^y + 2xy^3 + y$, $N(x,y) = x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x$ dersek 3 Tam dif. değil

$\frac{\partial M}{\partial y} = 8xy^3e^y + 2xy^4e^y + 6xy^2 + 1 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy^4e^y - 2xy^2 - 3$

$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \frac{8xy^3e^y + \cancel{2xy^4e^y} + 6xy^2 + 1 - \cancel{2xy^4e^y} + 2xy^2 + 3}{-y(2xy^3e^y + 2xy^2 + 1)} = \frac{4(2xy^3e^y + 2xy^2 + 1)}{-y(2xy^3e^y + 2xy^2 + 1)} = -\frac{4}{y}$ old. 4

$\mu(y) = e^{-\int\frac{4}{y}dy} = \frac{1}{y^4}$ 3 int. çarpanı olur. Verilen denklemin her iki tarafı bu fonk. ile çarpılırsa;

$\left(2xe^y + \frac{2x}{y} + \frac{1}{y^3}\right)dx + \left(x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4}\right)dy = 0$ 2 Tam dif. dır.

$\exists\ U = U(x,y)$

$U := \int_{x_0}^{x}\left(2te^y + \frac{2t}{y} + \frac{1}{y^3}\right)dt + \int_{y_0}^{y}\left(x_0^2e^\theta - \frac{x_0^2}{\theta^2} - \frac{3x_0}{\theta^4}\right)d\theta = c_1$ 3

$\Rightarrow \left(t^2e^y + \frac{t^2}{y} + \frac{t}{y^3}\right)\Big|_{x_0}^{x} + \left(x_0^2e^\theta + \frac{x_0^2}{\theta} + \frac{x_0}{\theta^3}\right)\Big|_{y_0}^{y} = c_1$ 3 $\Rightarrow x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} = c$ 2 genel çözüm

MAT 2217 Diferansiyel Denklemler

Arasınav Soruları

23.11.2013

Adı-Soyadı:
Numarası :
Bölümü :

1. $y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x)$ eğriler ailesini sağlayan en düşük mertebeden dif. denklemi bulunuz.(15p.)

2. $(2x - 3y + 4)\,dx + (3x - 2y + 1)\,dy = 0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.(20p.)

3. $\begin{cases} dx - 2xy^{-1}dy = x^4 dy \\ y(1) = 1 \end{cases}$ Cauchy problemini çözünüz.(15p.)

4. $(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)\,dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)\,dy = 0$ dif. denkleminin genel çözümünü integrasyon çarpanı yardımı ile bulunuz.(20p.)

5. $2xdy + ydx + xy^2(xdy + ydx) = 0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.(15p.)

6. $y' + e^x - 3y + e^{-x}y^2 = 0$ dif. denkleminin bir özel çözümü $y_1(x) = e^x$ olduğuna göre genel çözümünü bulunuz.(15p.)

NOT: Sınav süresi 110dk. olup ilk 30dk. çıkmak yasaktır.

Başarılar.

5) $2xdy + ydx + xy^2(xdy + ydx) = 0$

$p=1,\ q=2$ old. $\mu = y$ 2 dir. Denklemin her iki tarafı $\mu(y) = y$ ile çarpılırsa;

$\underbrace{y(2xdy + ydx)}_{d(xy^2)}$ 2 $+ xy^3 \underbrace{(xdy + ydx)}_{d(xy)}$ 2 $= 0 \Rightarrow d(xy^2) + (xy^2)\,y\,d(xy) = 0$ 2 olur.

$xy^2 = u$, $xy = v$ denir. $y = \frac{u}{v}$ 2 alınır.

Buna göre $du + u\frac{u}{v}dv = 0$ 2 $\Rightarrow \int \frac{du}{u^2} + \int \frac{dv}{v} = \int 0 \Rightarrow -\frac{1}{u} + \ln v = c$ 2

$\Rightarrow -\frac{1}{xy^2} + \ln(xy) = c$ 1 genel çözüm

6) $y = y_1 + \frac{1}{u} \Rightarrow y = e^x + \frac{1}{u} \Rightarrow y' = e^x - \frac{u'}{u^2}$ 3 dön. yapılırsa;

$e^x - \frac{u'}{u^2} + e^x - 3\left(e^x + \frac{1}{u}\right) + e^{-x}\left(e^x + \frac{1}{u}\right)^2 = 0 \Rightarrow \cancel{2e^x} - \frac{u'}{u^2} - \cancel{3e^x} - \frac{3}{u} + \cancel{e^x} + \frac{2}{u} + \frac{e^{-x}}{u^2} = 0$

$\Rightarrow -\frac{u'}{u^2} - \frac{1}{u} + \frac{e^{-x}}{u^2} = 0 \quad / -u^2$ ile çarpılırsa,

$\Rightarrow u' + u = e^{-x}$ 5 (lineer)

$u = e^{-\int dx}\left[c + \int e^{\int dx} \cdot e^{-x}dx\right] \Rightarrow u = e^{-x}\left[c + \int dx\right] \Rightarrow u = e^{-x}[c + x]$ 4 olur.

$y = e^x + \frac{1}{u}$ old. $y = e^x + \frac{1}{e^{-x}[c+x]}$ 3 $\Rightarrow y = e^x + \frac{e^x}{c+x}$ genel çözüm