MAT 2217 Diferansiyel Denklemler

Final Sınav Soruları

13.01.2015

Adı-Soyadı:
Numarası :
Bölümü :

1. $\begin{cases} y'\left(e^{2y}-y\right)\cos x = e^{y}\sin 2x \\ y(0)=0 \end{cases}$ başlangıç değer problemini çözünüz.(20p.)

2. $y^{(7)} - 16y''' = 16$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.(20p.)

3. $y'' - 2y' + y = xe^{x}\ln x$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.(20p.)

4. $x^3y''' - 4x^2y'' + 8xy' - 8y = 0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.(20p.)

5. $\begin{cases} Y'''(t) + 2Y''(t) - Y'(t) - 2Y(t) = -2\sin t \\ Y(0)=0, Y'(0)=0,\ Y''(0)=1 \end{cases}$ başlangıç değer problemini Laplace dönüşümünü kullanarak çözünüz.(20p.)

NOT 1: Yalnızca 5. soruda Laplace Dönüşümü kullanılacaktır.

2: Sınav süresi 75dk. olup ilk 30dk. çıkmak yasaktır.

Başarılar.

1) $(e^{2y}-y)\cos x\, y' = e^{y}\sin 2x$

$\dfrac{e^{2y}-y}{e^{y}}dy = \dfrac{2\sin x.\cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x}}dx \Rightarrow \int (e^{y} - ye^{-y})dy = \int 2\sin x\, dx$ D.A.D.D.

$e^{y} + y.e^{-y} + e^{-y} = -2\cos x + C$

$y(0)=0$ için $\Rightarrow 2 = -2 + C \Rightarrow C=4 \Rightarrow e^{y} + e^{-y}(y+1) = -2\cos x + 4$

2) $y^{(7)} - 16y''' = 0$

$y = e^{\lambda x} \Rightarrow \lambda^7 - 16\lambda^3 = 0$ karakteristik denklem

$\lambda^3(\lambda^4 - 16) = 0 \Rightarrow \lambda^3(\lambda^2+4)(\lambda^2-4)=0$

$\lambda_{1,2,3}=0$ 3 katlı $\quad \lambda_{4,5} = \mp 2i \quad \lambda_{6,7} = \mp 2$

$y_h(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4\cos 2x + C_5\sin 2x + C_6e^{2x} + C_7e^{-2x}$ homojen kısmın genel çözümü

$f(x) = 16 = e^{\alpha x}[P_m^{(1)}(x)\cos\beta x + P_m^{(2)}(x)\sin\beta x]$, $\alpha=0$, $m=0$, $\beta=0$

$\lambda = \alpha \mp i\beta = 0$ karakteristik denk. 3 katlı kökü $r=3$

$y_p(x) = x^r e^{\alpha x}[Q_m^{(1)}(x)\cos\beta x + Q_m^{(2)}(x)\sin\beta x] = x^3A$

$y_p'(x) = 3Ax^2 \quad y_p''(x) = 6Ax \quad y_p'''(x) = 6A \quad y_p^{IV}(x) = \dots = y_p^{(7)}(x) = 0$

$-16.6.A = 16 \Rightarrow A = -\frac{1}{6} \quad y_p(x) = -\frac{1}{6}x^3$ özel çözüm

Genel çözüm $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

$y(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4\cos 2x + C_5\sin 2x + C_6e^{2x} + C_7e^{-2x} - \frac{1}{6}x^3$

3) $y'' - 2y' + y = 0$

$y = e^{\lambda x} \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ karakteristik denklem $(\lambda-1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ çift katlı kök

$y_h(x) = e^x (c_1 + c_2 x)$ homojen kısmın genel çözümü

sabitlerin değişimi metodu

$y_p(x) = c_1(x) e^x + c_2(x) x e^x$

$$\begin{cases} c_1'(x) e^x + c_2'(x) x e^x = 0 \\ c_1'(x) e^x + c_2'(x) e^x (x+1) = x e^x \ln x \end{cases} \qquad W = \begin{vmatrix} e^x & x e^x \\ e^x & e^x(x+1) \end{vmatrix} = e^{2x}$$

$\ln x = t$, $x = e^t$

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x e^x \\ x e^x \ln x & e^x(x+1) \end{vmatrix}}{e^{2x}} = \frac{-x^2 e^{2x} \ln x}{e^{2x}} = -x^2 \ln x \Rightarrow c_1(x) = -\int x^2 \ln x \, dx = -\int e^{3t} t \, dt = -\frac{1}{3} t e^{3t} + \frac{1}{9} e^{3t} + \tilde{c}_1$$

$c_1(x) = \frac{1}{3} x^3 \ln x + \frac{1}{9} x^3 + \tilde{c}_1$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & x e^x \ln x \end{vmatrix}}{e^{2x}} = \frac{x e^{2x} \ln x}{e^{2x}} = x \ln x \Rightarrow c_2(x) = \int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + \tilde{c}_2$$

$\ln x = u$, $x\,dx = dv$

$\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 = 0$ o.ü. $y_p(x) = \left(-\frac{1}{3} x^3 \ln x + \frac{1}{9} x^3\right) e^x + \left(\frac{x^3}{2} \ln x - \frac{x^3}{4}\right) e^x$

$y(x) = y_h(x) + y_p(x) =$

4) $x^3 y''' - 4x^2 y'' + 8x y' - 8y = 0$

$x = e^t$

$x^3 \cdot \frac{1}{x^3} (y'''(t) - 3y''(t) + 2y') - 4x^2 \frac{1}{x^2} (y'' - y') + 8x \frac{1}{x} y' - 8y = 0$

$y''' - 7y'' + 14y' - 8y = 0$

$y = e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8 = 0$

	1	-7	14	-8
1		1	-6	8
	1	-6	8	10

$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4$

$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{4t} \Rightarrow y_h(x) = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^4$

5) $Y'''(t) + 2Y''(t) - Y'(t) - 2Y(t) = -2\sin t$

$\mathcal{L}\{Y'''(t) + 2Y''(t) - Y'(t) - 2Y(t)\} = -2\mathcal{L}\{\sin t\}$

$s^3 y(s) - s^2 Y(0) - s Y'(0) - Y''(0) + 2s^2 y(s) - 2s Y(0) - 2Y'(0) - s y(s) + Y(0) - 2y(s) = -\frac{2}{s^2+1}$

$(s^3 + 2s^2 - s - 2) y(s) - 1 = -\frac{2}{s^2+1}$

$$y(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 - s - 2} - \frac{2}{(s^2+1)(s^3 + 2s^2 - s - 2)}$$

$$y(s) = \frac{\cancel{s^2-1}}{(s^2+1)(s+2)\cancel{(s-1)(s+1)}} \qquad y(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s+2)}$$

$$\frac{1}{(s+2)(s^2+1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{Bs + C}{s^2+1} \Rightarrow 1 = As^2 + A + Bs^2 + 2Bs + Cs + 2C$$

(s^2+1) $(s+2)$

$s^2/$ $A + B = 0$ $\qquad$ $2/$ $2C - B = 1$

$s/$ $2B + C = 0$ $\qquad$ $2B + C = 0$

sabit/ $A + 2C = 1$ $\qquad$ $5C = 2$ $\quad C = \frac{2}{5}$ $\quad A = \frac{1}{5}$ $\quad B = -\frac{1}{5}$

$$\mathcal{L}^{-1}\{y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{5}}{s+2} + \frac{-\frac{1}{5}s + \frac{2}{5}}{s^2+1}\right\} \Rightarrow Y(t) = \frac{1}{5} e^{-2t} - \frac{1}{5}\cos t + \frac{2}{5}\sin t$$