MAT1152 GENEL MATEMATİK II YAZ OKULU FİNAL SINAVI SORULARI

08.08.2012

Adı Soyadı :
Numarası :
Grubu :

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.(2×6 p)

(a) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ (b) $\int \frac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)^3} dx$

2. $y = x^2 + 4$ eğrisi, $y = x - 2$, $x = -3$ ve $x = 0$ doğruları arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.(8p)

3. $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8x^2}$, $1 \leq x \leq 2$ eğrisinin parçasının uzunluğunu hesaplayınız.(8p)

4. $y = \sqrt{x-1}$ eğrisi, $y = 0$ ve $x = 5$ doğruları arasında kalan bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini hesaplayınız.(8p)

5. $\begin{cases} x = & t^3 \\ y = & 2t+3 \end{cases}$, $0 \leq t \leq 1$ eğri parçasının y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin yüzey alanını hesaplayınız.(8p)

6. Aşağıdaki integrallerin karakterini araştırınız(2×6 p)

(a) $\int_1^\infty \frac{x}{1+x^2} dx$ (b) $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$

7. Aşağıdaki serilerin karakterini araştırınız(3×6 p)

(a) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n + n^{3/2}}$ (b) $\sum_{n=1}^\infty e^{-2n}$ (c) $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n!}$

8. $\sum_{n=1}^\infty \frac{(x-1)^n}{2^n \sqrt{n}}$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını ve yarıçapını araştırınız.(9p)

9. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz.(9p)

10. $\begin{cases} 3x + y - z &= 3 \\ 5x + 2y &= 1 \\ 6x + 4y + 3z &= 3 \end{cases}$ sisteminin çözümünü araştırınız.(8p)

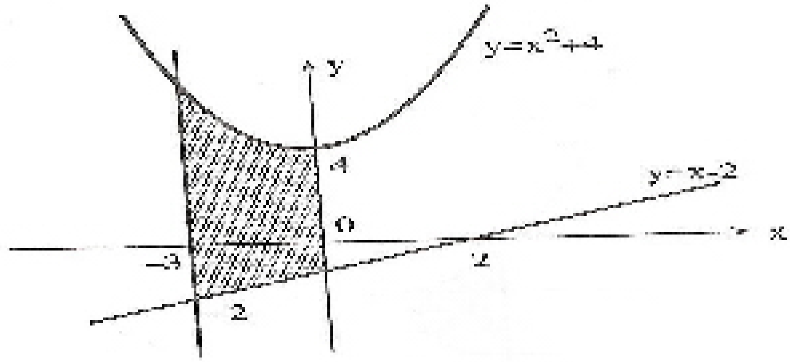
Not: Sınav süresi 100 dakikadır. İlk 30 dakika çıkmak yasaktır. BAŞARILAR

1) a) $u = \ln x$, $dv = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ denirse $du = \frac{dx}{x}$, $v = 2\sqrt{x}$. Dolayısıyla

$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}\ln x - \int 2\sqrt{x}\frac{dx}{x} = 2\sqrt{x}\ln x - 2\int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C$

b) $e^{2x} - 1 = t \Longrightarrow 2e^{2x}dx = dt$ olur. $\int \frac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)^3} dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{4}.\frac{1}{t^2} + C = -\frac{1}{4(e^{2x}-1)^2} + C$

2)

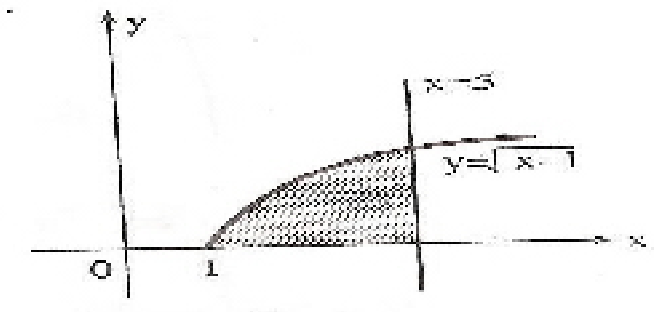


$$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx; A=\int_{-3}^{0} (x^2+4)-(x-2)dx=\int_{-3}^{0} (x^2-x+6)dx=(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+6x)\Big|_{-3}^{0}=\frac{63}{2}$$

3) $y=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8x^2}\Longrightarrow y'=x^3-\frac{1}{4x^3}\Longrightarrow 1+(y')^2=1+(x^3-\frac{1}{4x^3})^2=1+x^6-\frac{1}{2}+\frac{1}{16x^6}=x^6+\frac{1}{2}+\frac{1}{16x^6}=(x^3+\frac{1}{4x^3})^2$

$l=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_1^2(x^3+\frac{1}{4x^3})dx=(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{8x^2})\Big|_1^2=4-\frac{1}{32}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=3\frac{27}{32}$

4) kabuk metodu ile; $V=2\pi\int_a^b |x[f(x)-g(x)]|\,dx;$



$$V=2\pi\int_1^5 x\sqrt{x-1}dx \text{ integralinde } x-1=t^2;\ V=2\pi\int_{t=0}^{2}(t^2+1)t.2tdt=4\pi\int_0^2(t^4+t^2)dt=2\pi(\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3)\Big|_0^2=\frac{272}{15}\pi$$

5) $x'(t)=3t^2, y'(t)=2, S=2\pi\int_a^b |x|\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt=2\pi\int_0^1\left|t^3\right|\sqrt{9t^4+4}dt=2\pi\int_0^1 t^3(9t^4+4)^{1/2}dt=\frac{2\pi}{36}\cdot\frac{2}{3}((9t^4+4)^{3/2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{27}(13\sqrt{13}-8)$

6) a) $u=x^2+1;\ du=2xdx;\ \int_1^\infty\frac{x}{x^2+1}dx=\lim_{t\longrightarrow\infty}\int_1^t\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\lim_{t\longrightarrow\infty}\int_{u=2}^{t^2+1}\frac{du}{u}=\frac{1}{2}\lim_{t\longrightarrow\infty}\ln|u|\Big|_2^{t^2+1}=\infty$ ıraksak. veya $\lim_{x\longrightarrow\infty}x^p\frac{x}{x^2+1}=1=c$ eğer $p=1$ ise. ıraksak.

b) $u^2=x-1;\ 2udu=dx;\ \int_1^2\frac{x}{\sqrt{x-1}}dx=\lim_{\varepsilon\longrightarrow0}\int_{1+\varepsilon}^2\frac{x}{\sqrt{x-1}}dx=\lim_{\varepsilon\longrightarrow0}2\int_{u=\sqrt{\varepsilon}}^1(u^2+1)du=\lim_{\varepsilon\longrightarrow0}(u^3/3+u\Big|_{\sqrt{\varepsilon}}^1=4/3$ yakınsak. veya $\lim_{x\longrightarrow1}(x-1)^p\frac{x}{\sqrt{x-1}}=1=c$ eğer $p=1/2$ ise. yakınsak

7) (a) $n\geq1$ için $\frac{1}{n+n^{3/2}}\leq\frac{1}{n^{3/2}}$ ve $\sum\frac{1}{n^{3/2}}$ yakınsak old. $\sum\frac{1}{n+n^{3/2}}$ yakınsak veya $\lim_{n\longrightarrow\infty}n^p\frac{1}{n+n^{3/2}}=1=c$ eğer $p=3/2$ ise. yakınsak.

b) Köktesti, $\lim_{n\longrightarrow\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\longrightarrow\infty}\sqrt[n]{e^{-2n}}=e^{-2}<1$ yakınsak (c) $a_n=1/n!\to0$ ve $0<a_{n+1}\leq a_n$ olduğundan Leibnitz testinden yakınsak veya $\lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n+1}=0$, mutlak yakınsak, dolayısıyla yakınsak

8) $L=\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}=\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1/2^{n+1}\sqrt{n+1}}{1/2^n\sqrt{n}}=\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n+1}}=1/2; R=1/L=2$ yarıçap. Seri $|x-1|<2\Leftrightarrow-1<x<3$ için yakınsak. Uç noktalar: $x=-1$ için $\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ yakınsak,$x=3$ için $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ ıraksak, yakınsaklık aralığı $[-1,3)$

9) $A=\begin{vmatrix}3&1&-1\\5&2&0\\6&4&3\end{vmatrix}=-5\neq0, A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=\begin{vmatrix}2&0\\4&3\end{vmatrix}=6, A_{12}=-15, A_{13}=8, A_{21}=-7, A_{22}=15, A_{23}=-6, A_{31}=2, A_{32}=-5, A_{33}=1,\ A^{-1}=\frac{Ek(A)}{|A|}=\frac{1}{-5}\begin{bmatrix}6&-15&8\\-7&15&-6\\2&-5&1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}6/(-5)&-7/(-5)&2/(-5)\\-15/(-5)&15/(-5)&-5/(-5)\\8/(-5)&-6/(-5)&1/(-5)\end{bmatrix}$

10) $A=\begin{vmatrix}3&1&-1\\5&2&0\\6&4&3\end{vmatrix}=-5\neq0,\ \Delta_x=\begin{vmatrix}3&1&-1\\1&2&0\\3&4&3\end{vmatrix}=17\Rightarrow x=\frac{17}{-5},\ \Delta_y=\begin{vmatrix}3&3&-1\\5&1&0\\6&3&3\end{vmatrix}=-45\Rightarrow y=\frac{-45}{-5}$ $,\Delta_z=\begin{vmatrix}3&1&3\\5&2&1\\6&4&3\end{vmatrix}=21\Rightarrow z=\frac{21}{-5}$